THƯ VIỆN TOÁN

CHUYÊN ĐỀ TOÁN 9
Ôn thi vào lớp 10 chuyên chọn

NGUYỄN TĂNG VŨ

Ngày 27 tháng 11 năm 2019

Mục lục

Chương 1

Phương trình vô tỉ

Phương trình vô tỉ (phương trình chứa căn thức) là một trong những nội dung quan trọng nhất của đại số 9, xuất hiện trong hầu hết các đề thi học sinh giỏi cũng như đề thi tuyển sinh. Kĩ năng giải phương trình cũng là một trong kĩ năng quan trọng của học sinh chuyên toán. Có rất nhiều dạng phương trình và nhiều phương pháp giải khác nhau cho phương trình vô tỉ, tựu chung lại cũng là phương pháp hữu tỉ hóa các phương trình, tức là đưa về phương trình dạng đa thức đã biết cách giải ở lớp 8.Trong chương này đưa ra một vài dạng phương trình vô tỉ cùng với đó là các phương pháp cơ bản nhất, không đi sâu quá nhiều vào các kĩ thuật và các dạng khó.

1.1 Lý thuyết

Nếu $A(x), B(x)$ là các biểu thức chứa x, khi đó ta có các phương trình dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ và $\sqrt{A} = B$ là các phương trình vô tỉ cơ bản nhất, được giải bởi các tính chất sau.

Tính chất 1.1.1 $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

Tính chất 1.1.2 $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

1.2 Phương pháp lũy thừa

Phương pháp lũy thừa là phương pháp tự nhiên nhất và kinh điển nhất để giải phương trình vô tỉ, nhằm mục đích đưa phương trình đã cho về dạng cơ bản hoặc đưa về phương trình hữu tỉ, việc lũy thừa đòi hỏi sự khéo léo để không làm cho bậc của biểu thức quá cao, và trong quá trình lũy thừa ta chú ý là tạo ra phương trình mới tương đương phương trình đã cho hay chỉ là hệ quả của phương trình đã cho, nếu là hệ quả thì phải có bước thử lại nghiệm.

Chú ý. $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$ đúng khi và chỉ khi A, B cùng dấu.

Còn $A = B(1) \Rightarrow A^2 = B^2(2)$ thì phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

Ví dụ 1.1. *Giải phương trình:*

a) $\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x-5$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x}$

Lời giải. a) Ta có

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ -x^2+4x-3 = (2x-5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ 5x^2 - 24x + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ x = 2 \text{ hoặc } x = \dfrac{14}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{5}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{14}{5}$.

b) Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình tương đương với

$$x+1+2\sqrt{(x+1)(x-2)} + x - 2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x-2} = x+1$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-x-2) = x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3(n) \\ x = -1(l) \end{array} \right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

■

Ví dụ 1.2. *Giải phương trình* $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}3-2x-x^2\geq 0\\ 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2(2)\end{cases}\end{aligned}$$

- $(2)\Leftrightarrow\sqrt{x+5}=-\dfrac{x+2}{x}=\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{x+2}{x}\leq 0(**)\\ \sqrt{x+5}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2}(3)\end{cases}$
- $(3)\Leftrightarrow x^2(x+5)=(x+2)^2\Leftrightarrow x=-1(n),x=-4(l),x=4(l)$.
- Vậy phương trình có nghiệm $x=-1$.

■

Ví dụ 1.3. *Giải phương trình* $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

Lời giải.

- Điều kiện $\begin{cases}x\geq -1\\ \sqrt{x+1}-1\geq 0\\ x-\sqrt{x+8}\geq 0\end{cases}\quad(*)$.
- Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$

  $\Leftrightarrow x+1=x+1-\sqrt{x+8}+2\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$

  $\Leftrightarrow\sqrt{x+8}=2\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$

  $\Leftrightarrow x+8=4(x-\sqrt{x+8})$

  $\Leftrightarrow 4\sqrt{x+8}=3x-8$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{8}{3}16(x+8)=(3x-8)^2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{8}{3}9x^2-64x-64=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow x=8.$
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=8$.

■

Ví dụ 1.4. *Giải phương trình* $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$.

Lời giải.

- Điều kiện $\begin{cases}x(x-1)\geq 0\\ x(x+2)\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x\geq 1$.
- Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của phương trình.
- Xét $x\leq 1$. Khi đó phương trình tương đương

- $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x}$
  $\Leftrightarrow x-1+x+2+2\sqrt{(x-1)(x+2)}=4x$
  $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)}=x-\dfrac{1}{2}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^2+x-2=x^2-x+\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{8}$
- Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{9}{8}$.

■

Ví dụ 1.5. *Giải phương trình* $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$.

Lời giải. • Điều kiện $x \geq 1$.

- Khi đó phương trình tương đương

$$\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}=\frac{x+3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\frac{x+3}{2}$$
$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=\frac{x+3}{2}.$$

- Với $1 \leq x \leq 2$ thì phương trình tương đương

$$\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=\frac{x+3}{2} \Leftrightarrow x=1.$$

- Với $x>2$ thì phương trình tương đương

$$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\frac{x+3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 16x-16=x^2+6x+9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=5.$$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

■

Ví dụ 1.6. *Giải phương trình* $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$.

Lời giải. • Điều kiện $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}\\
&\Rightarrow 3x+1+2x+2-2\sqrt{(3x+1)(2x+2)}=4x+x+3-2\sqrt{4x(x+3)}\\
&\Rightarrow \sqrt{(3x+1)(2x+2)}=\sqrt{4x(x+3)}\\
&\Rightarrow 6x^2+8x+2=4x^2+12\\
&\Rightarrow x=1.
\end{aligned}$$

- Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

■

Chú ý. *Trong ví dụ trên, ta dùng dấu $\Rightarrow$ thay cho $\Leftrightarrow$, tức là phương trình sau chỉ là hệ quả của phương trình trước chứ không phải là tương đương, Do đó khi giải ra nghiệm ta phải thử lại phương trình ban đầu để nhận hay loại nghiệm.*

Ví dụ 1.7. *Giải phương trình* $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

Lời giải.

- Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}\\
&\Leftrightarrow 2x+11+3\sqrt[3]{x+5}.\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6})=2x+11\\
&\Rightarrow 3\sqrt[3]{x+5}.\sqrt[3]{x+6}.\sqrt[3]{2x+11}=0\\
&\Leftrightarrow x=-6 \text{ hoặc } -5 \text{ hoặc } x=-\frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

- Thử lại ta thấy tất cả đều là nghiệm của phương trình.
- Vậy phương trình có ba nghiệm $x=-6$ hoặc $x=-5$ hoặc $x=-\frac{11}{2}$.

■

Bài tập rèn luyện

Bài 1.1 Giải các phương trình sau;

a) $\sqrt{x^2+3x+4}-3x=1$

b) $1+\sqrt{x-1}=\sqrt{6-x}$

c) $\sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5$

d) $x-\sqrt{4-x^2}=0$

Bài 1.2 Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}=1$

b) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-4}$

c) $x^2-2x+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=0.$

d) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+3=0$

Bài 1.3 Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=1$

c) $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$

d) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$

Bài 1.4 Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$

b) $\sqrt[3]{2x-5}+\sqrt[3]{3x+7}=\sqrt[3]{5x+2}$

Bài 1.5 Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-3x+4}+1-x-\sqrt{3-x}=0$

b) $\sqrt{x^2+3x+4}+1+x-\sqrt{3+x}=0$

c) $\sqrt{x^2-3x+3}+1-x-\sqrt{2-x}=0$

d) $\sqrt{4x^2-10x+7}+2-2x-\sqrt{3-2x}=0$

1.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp đặt ẩn phụ sử dụng khi phương trình chứa một biểu thức lặp đi lặp lại nhiều lần, việc đặt ẩn phụ đưa phương trình về một phương trình đơn giản hơn, hoặc là đưa về dạng phương trình đã biết cách giải. Có rất nhiều dạng đặt ẩn phụ với nhiều dạng toán khác nhau, ở đây chúng tôi chỉ trình bày những dạng bài tập phù hợp nhất với chương trình trung học cơ sở, không đi sâu quá vào các ẩn phụ mẹo mực khác.

Chú ý. Khi đặt ẩn phụ thì nhớ đặt điều kiện cho ẩn phụ để giảm được các trường hợp cần xét.

Ví dụ 1.8. *Giải phương trình* $\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{-x^2+x+2}=1$.

Lời giải.

- Đặt $t=\sqrt{-x^2+x+2}, t\geq 0$. Khi đó

$$t^2==-x^2+x+2 \Leftrightarrow x^2-x+3=5-t^2.$$

- Phương trình trở thành $\sqrt{5-t^2}-t=1 \Leftrightarrow \sqrt{5-t^2}=(t+1)^2 \Leftrightarrow t^2+t-2=0$
  $\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-2(l) \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+x+2}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$
  $\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
- Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

■

Ví dụ 1.9. *Giải phương trình* $2x^2-6x+7=5\sqrt{x^2-3x+5}$.

Lời giải.

- Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+5}, t\geq 0$.
- Khi đó phương trình trở thành $2t^2-3=5t \Leftrightarrow 2t^2-5t-3=0 \Leftrightarrow t=3$ hoặc$t=-\dfrac{1}{2}(l)$
  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+5}=3 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=4$.
- Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1$ hoặc $x=4$.

■

Ví dụ 1.10. *Giải phương trình* $(x-1)^2 + 2(x+1)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}} = 12.$

Lời giải. • Điều kiện $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x \geq -3$.

- Khi đó phương trình tương đương
  $(x^2-2x-3) + 2(x+1)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}} = 8$
  $\Leftrightarrow (x+1)(x-3) + 2(x+1)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}} = 8.$
  Đặt $t = (x+1)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}} \Rightarrow t^2 = (x+1)(x-3).$
  Khi đó phương trình trở thành

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{hoặc } t = -4.$$

  Trường hợp $t = 2 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}} = 2$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq (x+1)(x-3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x^2 - 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{2}.$

■

Trên đây là các phương trình mà ta thấy rõ được biểu thức $f(x)$ lặp đi lặp lại, trong một số trường hợp khác $f(x)$ không xuất hiện một cách tường minh, mà phải thông qua một số biến đổi thì mới xuất hiện. Ta xem các ví dụ sau:

Ví dụ 1.11. *Giải phương trình* $x^2 + 3x\sqrt{x - \dfrac{4}{x}} = 10x + 4.$

Lời giải. • Điều kiện $x - \dfrac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0$ hoặc $x \geq 2$.
Khi đó phương trình

$$x^2 + 3x\sqrt{x - \frac{4}{x}} = 10x + 4$$
$$\Leftrightarrow x + 3\sqrt{x - \frac{4}{x}} = 10 + \frac{4}{x}$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{4}{x} + 3\sqrt{x - \frac{4}{x}} - 10 = 0.$$

- Đặt $t = \sqrt{x - \dfrac{4}{x}}, t \geq 0$. Phương trình trở thành:
  $t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -5(l) \Leftrightarrow \sqrt{x - \dfrac{4}{x}} = 2 \Leftrightarrow x - \dfrac{4}{x} = 4$
  $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}.$
- So sánh với điều kiện ta được phương trình có hai nghiệm $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

■

Ví dụ 1.12. *Giải phương trình* $\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}=3\sqrt[4]{1-x^2}$

Lời giải. • Điều kiện $-1\le x\le 1$.

Dễ thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình. Xét $x\neq 1$.

Khi đó phương trình tương đương

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+2=3\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}&t^2-3t+2=0\\ \Leftrightarrow\ &t=1 \text{ hoặc } t=2.\end{aligned}$$

Trường hợp

$$\begin{aligned}&t=1\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1+x}{1-x}=1\\ \Leftrightarrow\ &x=0.\end{aligned}$$

Trường hợp

$$\begin{aligned}&t=2\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=2\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1+x}{1-x}=16\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{15}{17}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$ hoặc $x=\dfrac{15}{17}$.

■

Trong một số trường hợp phức tạp hơn, ta đặt ẩn phụ một biểu thức, và tính các biểu thức còn lại theo ẩn phụ. Ta xem ví dụ sau:

Ví dụ 1.13. *Giải phương trình* $\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}+2\sqrt{22+9x-x^2}=17$.

Lời giải. • Điều kiện $-2\le x\le 11$.

• Đặt $t=\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}, t\ge 0$. Khi đó $t^2=13+2\sqrt{(11-x)(x+2)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{22+9x-x^2}=t^2-13$.

- Phương trình trở thành $t + t^2 - 13 = 17 \Leftrightarrow t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ hoặc $t = -6(l)$. $\Leftrightarrow$
  $\sqrt{11 - x} + \sqrt{x + 2} = 5$
  $\Leftrightarrow \sqrt{22 + 9x - x^2} = 6$
  $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 7$.
- Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$ hoặc $x = 7$.

■

Sau đây là cách đặt ẩn phụ để đưa phương trình thành một phương trình hai ẩn, từ đó giải ẩn này theo ẩn kia để thiết lập một phương trình đơn giản hơn phương trình đã cho.

Ví dụ 1.14. *Giải phương trình* $x^2+16x-16=(2x+1)\sqrt{3x^2+4}$.

Lời giải.

- Ta có
$$\begin{aligned}&x^2+16x-16=(2x+1)\sqrt{3x^2+4}\\ \Leftrightarrow\ &4(2x+1)^2-5(3x^2+4)=(2x+1)\sqrt{3x^2+4}\end{aligned}$$

- Đặt $\begin{cases}a=2x+1\\ b=\sqrt{3x^2+4}, b\geq 2.\end{cases}$ Phương trình trở thành
$$\begin{aligned}&4a^2-5b^2=ab\\ \Leftrightarrow\ &4a^2-ab-5b^2=0\\ \Leftrightarrow\ &a=-b \text{ hoặc } a=\frac{5}{4}b.\end{aligned}$$

- Trường hợp
$$\begin{aligned}&a=-b\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{3x^2+4}=-(2x+1)\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\leq -\dfrac{1}{2}\\ x^2+4x-3=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &x=-2-\sqrt{7}.\end{aligned}$$

- Trường hợp
$$\begin{aligned}&a=\frac{5}{4}b\\ \Leftrightarrow\ &5\sqrt{3x^2+4}=4(2x+1)\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{2}\\ 11x^2-64x+84=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{42}{11} \text{ hoặc } x=2.\end{aligned}$$

- Vậy phương trình có các nghiệm $x=-2-\sqrt{7}, x=\dfrac{42}{11}$ hoặc $x=2$.

■

Ví dụ 1.15. *Giải phương trình* $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}=3\sqrt{x^2+4x+5}$.

Lời giải.

- Ta có
$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}=3\sqrt{x^2+4x+5}\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}=3\sqrt{-(x^2+1)+2(x^2+2x+3)}.\end{aligned}$$

- Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x^2+1}, a\geq 1\\ b=\sqrt{x^2+2x+3}, b\geq\sqrt{2}.\end{cases}$. Phương trình trở thành:
$a+2b=3\sqrt{-a^2+2b^2}\Leftrightarrow (a+2b)^2=9(-a^2+2b^2)\Leftrightarrow 5a^2+2ab-7b^2=0$
$\Leftrightarrow (a-b)(5a+7b)=0\Leftrightarrow a=b.$

Khi đó ta có $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+2x+3} \Leftrightarrow x^2+1 = x^2+2x+3 \Leftrightarrow x = -1$.

- Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

■

Ví dụ 1.16. *Giải phương trình* $\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1-x^2} = x - 3$.

Lời giải.

- Điều kiện $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1}, a \ge 1 \\ b = \sqrt{1-x}, b \ge 0 \end{cases}$. Khi đó $x - 3 = -a^2 - 2b^2$ và phương trình trở thành
$a - 2b - 3ab = -a^2 - 2b^2 \Leftrightarrow (a^2 - 3ab + 2b^2) + (a - 2b) = 0$
$\Leftrightarrow (a-2b)(a-b) + (a-2b) = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a-b+1) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$ hoặc $b = a+1$.

- Trường hợp

$$
\begin{aligned}
& a = 2b \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{1+x} = 2\sqrt{1-x} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 1 + x = 4(1-x) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

- Trường hợp

$$
\begin{aligned}
& b = a + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - x = x + 2 + 2\sqrt{1+x} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{1+x} = -2x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -1 \le x \le -\frac{1}{2} \\ 4(1+x) = (2x+1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -1 \le x \le \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3}{5}$ hoặc $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

■

Ví dụ 1.17. *Giải phương trình* $x^2 + 5x - 3 = 2(2x+3)\sqrt{x-1}$.

Lời giải.

- Điều kiện $x \ge 1$.
- Khi đó

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 5x - 3 = 2(2x+3)\sqrt{x-1} \\
\Leftrightarrow\ & 3(x-1) - 2(2x+3)\sqrt{x-1} + x^2 + 2x = 0
\end{aligned}
$$

- Đặt $t = \sqrt{x-1}, t \geq 0$. Ta được

$$3t^2 - 2(2x+3)t + x^2 + 2x = 0.$$

- Đặt $\Delta' = (2x+3)^2 - 3(x^2+2x) = (x+3)^2$. Do đó phương trình trên có hai nghiệm $t = x+2$ hoặc $t = \dfrac{x}{3}$.

- Trường hợp

$$\begin{aligned} & t = x+2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x-1} = x+2 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 3x + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm).} \end{aligned}$$

- Trường hợp

$$\begin{aligned} & t = \frac{x}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 3\sqrt{x-1} = x \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 9x + 9 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{9 \pm 3\sqrt{5}}{3}$.

■

Ngoài ra còn có cách đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.18. *Giải phương trình:* $\sqrt[3]{7+x} - \sqrt{2-x} = 1$

Lời giải. Phương trình có nhiều dấu căn bậc khác nhau, và biểu thức trong căn lại có mối liên hệ khá rõ ràng.
Ta đặt $u = \sqrt[3]{7+x}, v = \sqrt{2-x}$ ta có hệ $u - v = 1, u^3 + v^2 = 9$.
Sử dụng phương pháp thế ta có $v = u - 2$ và $u^3 + (u-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow u^3 + u^2 - 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow u = 2$ và $v = 1$.
Từ đó giải ra $x = 1$ là nghiệm. ■

Bài tập rèn luyện

Bài 1.6 Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x^2-4x+8}+\sqrt{2x^2-4x+3}=5$

b) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

c) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

d) $4x^2+10x+9=5\sqrt{2x^2+5x+3}$

Bài 1.7 Giải các phương trình sau:

a) $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

c) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

d) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$

Bài 1.8 Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$

b) $\dfrac{4x-1}{\sqrt{4x-3}}+\dfrac{11-2x}{\sqrt{5-x}}=\dfrac{15}{2}$

c) $\dfrac{3-x}{\sqrt{13-6x}}+\dfrac{3+x}{\sqrt{13+6x}}=2$

Bài 1.9 Giải các phương trình sau:

a) $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

b) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

c) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x+20}=5\sqrt{x+1}$

d) $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

Bài 1.10 Giải các phương trình sau:

a) $2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}=\dfrac{x}{3x-1}+1$

b) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

c) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

d) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+6+4}=0$

e) $(x-1)(x+2)+2(x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=8$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}}=2.$

1.4 Phương pháp nhân lượng liên hợp

Phương pháp nhân lượng liên hợp được sự dụng khi phương trình có độ phức tạp cao, lệch bậc nhiều ở các biểu thức chứa căn và nghiệm của phương trình thường dễ đoán và có ít nghiệm. Nội dung phương pháp là ta phải đoán được nghiệm, thêm bớt (tách) và nhóm các số hạng phù hợp và nhân chia với biểu thức liên hợp để xuất hiện nhân tử. Ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1.19. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3(x^2-x-1)}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\\
\Leftrightarrow\ &-(x-2)\left[\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &x=2.
\end{aligned}$$

(Rõ ràng biểu thức trong ngoặc "[]" là dương)
Thử lại ta thấy $x=2$ thoả mãn.
Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

■

Chú ý Ta có bước thử lại vì chưa đặt điều kiện của phương trình.

Ví dụ 1.20. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq \sqrt[3]{2}$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^2-2}-5\\
&\Leftrightarrow (x-3)[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^1-1)^2}+2\sqrt{x^2-1}+4}]=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}\\
&\Leftrightarrow (x-3)[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-x}+5}]=0\\
&\Leftrightarrow x=3.
\end{aligned}$$

Vì

$$1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+2}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3}<2<\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-x}+5}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$. ■

Ví dụ 1.21. *Giải phương trình* $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$.

Lời giải. Điều kiện $2 \leq x \leq 4$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1+\sqrt{4-x}-1=2x^2-5x-3\\
&\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{x-3}{\sqrt{4-x}+1}=(x-3)(2x+1)\\
&\Leftrightarrow (x-3)[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}-(2x+1)]=0\\
&\Leftrightarrow x=3.
\end{aligned}$$

Vì

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}\leq 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}\leq 2-\sqrt{2}.$$

và $2x+1\geq 5$ (do $x\geq 2$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

Ví dụ 1.22. *Giải phương trình* $x^2 + x - 1 = (x+2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
& x^2 + x - 1 = (x+2)\sqrt{x^2-2x+2} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 7 + 3(x+2) - (x+2)\sqrt{x^2-2x+2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 7 + (x+2)(3 - \sqrt{x^2-2x+2}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 7 - \frac{(x+2)(x^2-2x-7)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2-2x-7)(1 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2-2x-7)[\frac{\sqrt{(x-1)^2+1} - (x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 7 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1 \pm \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{7}$. ■

1.5 Bài tập

Bài 1.11 Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6$

b) $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$

c) $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$

d) $\dfrac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} = x + 21$

e) $9(x+1)^2 = (3x+7)(1-\sqrt{3x+4})^2$

Bài 1.12 Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

b) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$

d) $x^2 - 4x - 2 + \sqrt{x^2-4x+7} + \sqrt{5x-6} = 0$

e) $3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+8} - 2 = \sqrt{x^2+15}$

Bài 1.13 Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2-x+3} - \sqrt{21x-17} + x^2 - x = 0$

b) $x(x+1)(x-3) + 3 = \sqrt{4-x} + \sqrt{1+x}$

c) $\sqrt{3x+1} + 2\sqrt[3]{19x+8} = 2x^2 + x + 5$

d) $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^3 + x^2 - 4x - 4 + |x| + |x-1|$

Bài 1.14 Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$

c) $2x^2 - x - 2 = \sqrt{5x+6}$
d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = x^2 - x - 1$

Bài 1.15 Giải các phương trình sau
a) $x^2 - 3x + 4 = 2\sqrt{x-1}$
b) $\sqrt{2x^2+8} - 2\sqrt{2x-3} + x - 4 = 0$
c) $x^2 - 9x + 24 = 2\sqrt{x-3} + 2\sqrt{9-2x}$

Bài 1.16 Giải các phương trình sau:
a) $x^2 - x + 1 - \sqrt{2x-1} = 0$
b) $x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x=0}$
c) $2x + 1 = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}$

1.6 Bài tập ôn tập chương

Bài 1.17 Giải các phương trình sau
a) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{2}$
b) $x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$
c) $9 + \sqrt{9 + \sqrt{x}} = x$
d) $\sqrt[3]{(3x-2)^2} + (x+1)\sqrt[3]{3x-2} + 3x - 6 = 0$

Bài 1.18 Giải các phương trình sau:
a) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$
b) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$
c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

Bài 1.19 Giải các phương trình sau:
a) $2\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 3\sqrt{1-x^2} = 3 - x$
b) $4\sqrt{1-x} = x + 6 - 3\sqrt{1-x^2} + 5\sqrt{1+x}$
c) $4 + 2\sqrt{1-x} = -3x + 5\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x^2}$

Bài 1.20 Giải các phương trình sau
a) $\sqrt{2x^2+13x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 8\sqrt{x}$
b) $(2-x)\sqrt{1-x} + (4x-2)\sqrt{1+x} = 3x\sqrt{x}$
c) $3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 2(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$
d) $\dfrac{1}{x - \sqrt{x} + 2} + \dfrac{1}{x - 2\sqrt{x} + 2} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$
e) $2\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+3x-1} = 2\sqrt{2x^2+2x-8}$

Bài 1.21 Giải các phương trình sau
a) $3x^2 + 4x - 3 = 4x\sqrt{4x-3} = 0$
b) $3x^2 + 2x + 7 = 3(x+1)\sqrt{x^2+3} = 0$
c) $x^2 - 5x\sqrt{2x-3} + 4(2x-3) = 0$
d) $x - 1 + \sqrt{2x-3} = \sqrt{5x^2-12x+8}$
e) $\sqrt{7x^2-17x+7} = x - 1 + \sqrt{x}$

Chương 2

Hệ phương trình

Trong chương này đề cập đến một số phương pháp giải hệ phương trình cơ bản nhất: Phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp ẩn phụ, và phương pháp đánh giá. Qua các phương pháp chúng ta cũng đi qua một số dạng phương trình mẫu mực như: hệ phương trình đối xứng loại một, loại hai, hệ đẳng cấp, hệ hoán vị vòng quanh,...Ngoài ra là các hệ không mẫu mực ở mức độ vừa phải, không quá xấu về mặt hình thức, phù hợp với các bạn THCS.

2.1 Phương pháp thế

2.1.1 Nội dung - Ví dụ

Nội dung phương pháp: Từ một trong các phương trình, tính được một hoặc nhiều biến theo một hoặc nhiều biến khác, sau đó thế hết vào các phương trình còn lại để số biến sẽ giảm lại.

Trong các phương pháp giải hệ phương trình thì **Phương pháp thế** là phương pháp quan trọng và được sử dụng nhiều nhất. Mục tiêu của việc thế là đưa hệ nhiều ẩn thành hệ ít ẩn hơn, hoặc đưa về phương trình một ẩn, từ đó có thể giải được bài toán.

Ví dụ 2.1. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 - 3y^2 + 4xy = 2 \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x + 2y = 3(1) \\ x^2 - 3y^2 + 4xy = 2(2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $x = 3 - 2y$, thế vào (2) ta có:

$(3 - 2y)^2 - 3y^2 + 4(3 - 2y)y = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Với $y = 1 \Rightarrow x = 1$.

Với $y = -1 \Rightarrow x = 5$. Vậy hệ có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1), (5; -1)$. ∎

Ví dụ 2.2. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x^2 + x + y^2 = 7 \\ xy - x + y = 3 \end{cases}$

Lời giải. Nếu $x = -1$ thì phương trình thứ hai vô nghiệm.
Xét $x \neq -1$. Từ phương trình thứ hai ta được $xy - x + y = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{x+3}{x+1}$.
Thay vào phương trình đầu của hệ ta được

$$\begin{aligned} & 2x^2 + x + (\frac{x+3}{x+1})^2 = 7 \\ \Leftrightarrow\ & (2x^2 + x - 6) + [(\frac{x+3}{x+1} - 1)]^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)(2x-3) + \frac{4}{(x+1)^2}(x+2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -2 \text{ hoặc } 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp $x = -2$ thay vào phương trình thứ hai ta được $y = -1$. Trường hợp

$$\begin{aligned} & 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(2x^2 + 3x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}. \end{aligned}$$

Với $x = 1$ thay vào phương trình thứ hai ta được $y = 2$.
Với $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y = \dfrac{9 \pm \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}}$.
Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (-2; -1), (1; 2), \left(\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}; \dfrac{9 \pm \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}} \right)$. ∎

Ví dụ 2.3. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x. \end{cases}$

Lời giải. Từ phương trình thứ hai suy ra $y = \dfrac{2x^2 + 9x - 6}{7}$.
Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned} & 2x^2(\frac{2x^2 + 9x - 6}{7}) + 3x(\frac{2x^2 + 9x - 6}{7}) = \frac{7.4x^2}{7} + 9(\frac{2x^2 + 9x - 6}{7}) \\ \Leftrightarrow\ & (2x^2 + 9x - 6)(2x^2 + 3x - 9) = 28x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^4 + 24x^3 - 31x^2 - 99x + 54 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x - \frac{1}{2})(x+2)(4x^2 + 18x - 54) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}. \end{aligned}$$

Trường hợp $x = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình thứ hai ta được $y = -\frac{1}{7}$.
Trường hợp $x = -2$ thay vào phương trình thứ hai ta được $y = -\frac{16}{7}$.
Trường hợp $x = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}$ thay vào phương trình thứ hai ta được $y = 3$.
Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{7}), (-2; -\frac{16}{7}), \left(\frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}; 3\right)$. ■

Ví dụ 2.4. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2. \end{cases}$

Lời giải. Nếu $x = 0$ thì hệ vô nghiệm.
Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế của phương trình thứ hai cho x ta được $xy + x^2y^2 = -6x^3$.
Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned} &-6(1 + x^3y^3) = 19(xy + x^2y^2) \\ \Leftrightarrow\ & xy = -\frac{2}{3} \text{ hoặc } xy = -\frac{3}{2} \text{ hoặc } xy = -1. \end{aligned}$$

Trường hợp $xy = -\frac{2}{3}$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -2 \end{cases}$.

Trường hợp $xy = -\frac{3}{2}$ ta được $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3. \end{cases}$
Trường hợp $xy = -1$ ta được $x = 0$ (loại).
Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (\frac{1}{3}; -2), (\frac{-1}{2}; 3)$. ■

Một số hệ phương trình nhiều khi phải biến đổi một vài bước thì mới xuất hiện phép thế.

Ví dụ 2.5. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{y-1} = 2(x - y). \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1, y \geq 0$.
Phương trình thứ nhất tương đương

$$\begin{aligned} &(x + y)^2 - (x + y) - 3y^2 - 3xy = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x + y)(x - 2y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x = -y \text{ hoặc } x = 2y + 1. \end{aligned}$$

Do $x \geq 1, y \geq 0$ nên trường hợp $x = -y$ không thể xảy ra.

Xét $x = 2y + 1$ thay vào phương trình thứ hai ta được

$$\begin{aligned} &(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2y + 2 \\ \Leftrightarrow\ &(y+1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &y = 2 \text{ (do } y \geq 0) \end{aligned}$$

. Suy ra $x = 2$.
Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (5, 2)$. ■

Trong ví dụ trên thì từ một phương trình ta phân tích thành thừa số, từ đó có những phương trình đơn giản hơn và sử dụng phương pháp thế.Ta xét tiếp ví dụ sau:

Ví dụ 2.6. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} &x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x^2 - y)(2x - y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &y = x^2 \text{ hoặc } y = 2x + 1. \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1, 1), (\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \pm\sqrt{5})$. ■

Ví dụ 2.7. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 18y + 16 = 0 \end{cases}$

Lời giải. Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

$$y^2 - (4x+8)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai theo y ta được

$$\Delta = (4x+8)^2 - 4(-5x^2 + 16x + 16) = 36x^2.$$

Suy ra $y = \frac{4x + 8 + 6x}{2} = 5x + 4$ hoặc $y = \frac{4x + 8 - 6x}{2} = 4 - x$.
Trường hợp $y = 5x + 4$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được

$$x(5x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{4}{5}.$$

Trường hợp này hệ có nghiệm $(x, y) = (0, 4), (-\frac{4}{5}, 0)$.

Trường hợp $y = 4 - x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4.$$

Trường hợp này hệ có nghiệm $(x, y) = (0, 4), (4, 0)$.
Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (0, 4), (4, 0), (-\frac{4}{5}, 0)$.

■

Ngoài cách phân tích thành nhân tử, ta còn có một số biến đổi khác phức tạp hơn, ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 2.8. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2 + y^2 = x - y \\ y^3 - x^3 = y - x^2 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x - y \\ y^3 - x^3 = y - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = -y(y+1) \\ y(y-1)(y+1) = x^2(x-1). \end{cases}$$

Thay phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned} & -x(x-1)(y-1) = x^2(x-1) \\ \Leftrightarrow\ & x(x-1)(x+y-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \text{ hoặc hoặc } x = 1 - y. \end{aligned}$$

Trường hợp $x = 0$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $y = 0$ hoặc $y = -1$.
Trường hợp $x = 1$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $y = 0$ hoặc $y = -1$.
Trường hợp $x = 1 - y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $y = 0$. ■

Ví dụ 2.9. *Giải phương trình* $\begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2}. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 3x - y \geq 0. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ & x+y+3x-y+2\sqrt{(x+y)(3x-y)}=2\\
\Leftrightarrow\ & 1-2x=\sqrt{(x+y)(3x-y)}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}4x^2-4x+1=3x^2+2xy-y^2\\ x\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}(x-y)^2=4x-1\\ \dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được

$$\begin{aligned}
&(4x-1)^2=13x-4\\
\Leftrightarrow\ & 16x^2-21x+5=0\\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{5}{16}\text{ hoặc } x=1\text{ (loại).}
\end{aligned}$$

Với $x=\dfrac{5}{16}$ thì $y=-\dfrac{3}{16}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{5}{16};-\dfrac{3}{16}\right)$. ■

Bài tập

Bài 2.1 Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x-4}=5\\ 2x+y=14\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y=-1\\ x^3-3x=y^3-3y\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^2y+2(x^2+y)=8\\ xy+x+y=5\end{cases}$

d) $\begin{cases}x^2+5x+y=9\\ 3x^3+x^2y+2xy+6x^2=18\end{cases}$

Bài 2.2 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}y^2-xy+1=0\\ x^2+y^2+2x+2y+1=0\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^3-2xy+5y=7\\ 3x^2-2x+y=3\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-\sqrt{y+1}=\dfrac{5}{2}\\ y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$

d) $\begin{cases}x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9\\ x^2+2xy=6x+6\end{cases}$

e) $\begin{cases}x^2+1+y(y+x)=4y\\ (x^2+1)(y+x-2)=y\end{cases}$

f) $\begin{cases}x(x+y+1)-3=0\\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0\end{cases}$

Bài 2.3 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2x-3} = (y^2+2018)(5-y) + \sqrt{y} \\ y(y-x+2) = 3x+3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + 3y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4xy + 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Bài 2.4 Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 - 4y^3 = 6x^2y - 9xy^2 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 4(x+y) = 0 \\ xy(x^2+y^2) - 1 = 3xy - (x+y)^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x}(3\sqrt{x} - y) + x\sqrt{x} = 3y + \sqrt{y-1} \\ 3xy^2 + 4 = 4x^2 + 2y + x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

f) $\begin{cases} y^2 - x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}} = 2x - 2 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1 \end{cases}$

Bài 2.5 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6\dfrac{x}{y} - 2 = \sqrt{3x-y} + 3y \\ 2\sqrt{3x + \sqrt{3x-y}} = 6x + 3y - 4. \end{cases}$

2.2 Phương pháp cộng đại số - Hệ phương trình đối xứng loại hai

Từ một hệ phương trình gồm có hai hay nhiều phương trình, ví dụ $\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=0(1) \\ g(x,y)=0(2) \end{array}\right.$, ta tạo ra một hệ mới tương đương với hệ đã cho, bằng cách tạo thêm một phương trình dạng $af(x,y)+bg(x,y)=0$, việc chọn lựa các hệ số a,b đòi hỏi nhiều kinh nghiệm vì phương trình mới tạo ra phải đơn giản hơn, hoặc có ý để giúp giải được hệ.

Hệ đối xứng loại hai là hệ có dạng $\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=0(1) \\ g(x,y)=0(2) \end{array}\right.$ trong đó $f(y,x)=g(x,y)$ và $g(y,x)=f(x,y)$. Để giải hệ này ta lấy (1) trừ (2), sau đó xử lý tiếp.

Ví dụ 2.10. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x+3y=2x^2 \\ y+3x=2y^2 \end{cases}$

Lời giải. Ta có Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2x^2 \\ -2(x-y)=2(x^2-y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2x^2 \quad (1) \\ 2x(x-y)=0 \quad (2) \end{cases}$.

Từ (2) suy ra $x=0$ hoặc $x=y$.

Trường hợp $x=0$ thay vào (1) ta được $y=0$.

Trường hợp $x=y$ thay vào (1) ta được $4x=2x^2 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=0$.

Vậy $(x,y)=(2,2)$ hoặc $(x,y)=(0,0)$. ■

Ví dụ 2.11. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x. \end{cases}$

Lời giải. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=-2(x-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y \quad (1) \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0 \quad (2) \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow x=y$ hoặc $x^2+xy+y^2+2=0$.

Trường hợp $x=y$ thay vào (1) ta được $x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$.

Suy ra $x=1$ hoặc $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Trường hợp $x^2+xy+y^2+2=0 \Leftrightarrow (x-\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{3y^2}{4}+2>0$ (vô lý.)

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=(1,1)$ hoặc $(x,y)=(\dfrac{1-\pm\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\pm\sqrt{5}}{2})$.

■

Ví dụ 2.12. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 3y = \dfrac{x^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $xy \neq 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \ \ (1) \\ 3xy(x-y) = -(x-y)(x+y) \ \ (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (x-y)(x+y+3xy) = 0$.

Trường hợp $x = y$, thay vào (1) ta được $3x^3 - x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $3x^2 + 2x + 2 = 0$ (vô nghiệm). Vậy $(x,y) = (1,1)$.

Trường hợp $x + y + 3xy = 0$ không xảy ra. Thật vậy, để ý rằng từ hệ phương trình đã cho nếu có nghiệm (x,y) thì $x,y > 0$ do đó $x + y + 3xy > 0$.

Vậy hệ có nghiệm $(x,y) = (1,1)$.

■

Trên đây là các hệ phương trình đối xứng loại hai, sau đây ta xét các ví dụ về một số hệ không mẫu mực khác, sử dụng phương pháp cộng đại số. Chú ý, tạo ra phương trình mới thì phương trình mới có thể xuất hiện hằng đẳng thức, phân tích thành nhân tử được...

Ví dụ 2.13. $\begin{cases} x^2 + 6y = 6x \\ y^2 + 9 = 2xy \end{cases}$

Lời giải. Lấy phương trình (1) cộng phương trình (2) ta có $x^2 + y^2 - 2xy + 6(y-x) + 9 = 0 \Leftrightarrow (y - x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 3$.

Thế vào (1) ta có: $x^2 + 6(x-3) = 6x \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}, x = -3\sqrt{2}$.

Với $x = 3\sqrt{2} \Rightarrow y = 3\sqrt{2} - 3$.

Với $x = -3\sqrt{2} \Rightarrow y = -3\sqrt{2} - 3$. Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 3); (-3\sqrt{2}; -3\sqrt{2} - 3)$. ■

Ví dụ 2.14. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^2 + 2xy = 7x + 5y - 9. \end{cases}$

Lời giải. Cộng vế theo theo vế hai phương trình ta được

$$\begin{aligned}
&2x^2+y^2+3xy-7x-5y+6=0\\
\Leftrightarrow\ &y^2-(5-3x)y+2x^2-7x+6=0\\
\Leftrightarrow\ &y^2-(5-3x)y+(2x-3)(x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(y+2x-3)(y+x-2)=0. \Leftrightarrow y+2x-3=0 \text{ hoặc } \ y+x-2=0.
\end{aligned}$$

Trường hợp $\begin{cases} y+2x-3=0\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x\\ 3x^2-9x+6=0.\end{cases}$.

Ta được $\begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2\\ y=-1.\end{cases}$

Trường hợp $\begin{cases} yy+x-2=0\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x\\ x^2-2x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=1.\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=(1,1),(2,-1)$. ■

Ví dụ 2.15. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2+y^2+4xy=6\\ 2x^2+8=3y+7x\end{cases}$.

Lời giải. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4xy=6\\ 4x^2+16=6y+14x.\end{cases}$

Cộng vế theo vế của hai phương trình ta được

$$\begin{aligned}
&5x^2+y^2+4xy-6y-14x+10=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)^2+(2x+y-3)^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x=1\\ 2x+y=3\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x=1\\ y=1.\end{cases}
\end{aligned}$$

■

Ví dụ 2.16. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2y+2x+3y=6\\ 3xy+x+y=5\end{cases}$.

Lời giải. Trừ vế theo vế hai phương trình ta được

$$x^2y - 3xy + x + 2y - 1 = 0.$$

Dễ thấy với $y = 0$ thì $(x, 0)$ không thể là nghiệm của hệ nên ta chỉ xét $y \neq 0$. Chia hai vế của phương trình trên cho y ta được

$$\begin{aligned} & x^2 - 3x + \frac{x}{y} + 2 - \frac{1}{y} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - (3 - \frac{1}{y})x + (2 - \frac{1}{y}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x + \frac{1}{y} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ hoặc } x + \frac{1}{y} - 2 = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp $\begin{cases} x = 1 \\ 3xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Trường hợp $\begin{cases} x + \frac{1}{y} - 2 = 0 \\ 3xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ 3x + \frac{x}{y} + 1 = \frac{5}{y}. \end{cases}$

Suy ra $\frac{1}{y} = 2 - x$ và

$$\begin{aligned} & 3x + x(2-x) + 1 = 5(2-x)) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 10x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ hoặc } x = 9. \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1, 1), (9, -\frac{1}{7})$. ■

Ví dụ 2.17. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0. \end{cases}$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất cộng hai lần phương trình thứ hai ta được

$$\begin{aligned} & (x + 2y)^2 + 3(x + 2y) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x + 2y + 1)(x + 2y + 2) = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp $x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\begin{aligned} & y^2 - 2y - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Với $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3+\sqrt{5}$. Với $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3-\sqrt{5}$. Trường hợp $x+2y+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2y-2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$y^2 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Với $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3+\sqrt{5}$.
Với $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3-\sqrt{5}$.
Vậy hệ có nghiệm $(x,y) = (-3-2\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), (-3+2\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}), (-3+\sqrt{5}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$, $(-3-\sqrt{5}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$. ■

Ví dụ 2.18. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ x(y^3-2) = 3. \end{cases}$

Lời giải. Dễ thấy $x \neq 0$. Khi đó hệ tương đương

$$\begin{cases} 2+3y = \dfrac{1}{x^3} \\ y^3 - x = \dfrac{3}{x} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình ta được

$$\begin{aligned} y^3 + 3y = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} &\Leftrightarrow y^3 - \frac{1}{x^3} + 3(y - \frac{1}{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - \frac{1}{x})(y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x} + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - \frac{1}{x}[(y + \frac{1}{2x})^2 + \frac{3}{4x^2} + 3 = 0] \\ &\Leftrightarrow (y - \frac{1}{x})(y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}) + 3(y - \frac{1}{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\frac{1}{x^3} - 2 = \frac{3}{x} \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

Với $x = -1$ ta được $y = -1$, với $x = \dfrac{1}{2}$ ta được $y = 2$.
Vậy hệ có nghiệm $(x,y) = (-1,-1), (\dfrac{1}{2}, 2)$. ■

Bài tập rèn luyện

Bài 2.6 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - y - 1 = 0 \\ y^2 - 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + 3x = 8y \\ y^3 + 3y = 8x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 = 5x + y \\ y^3 = 5y + x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}$

$\begin{cases} xy + x^2 = 1 + y \\ xy + y^2 = 1 + x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^3 = x^2 + 2y^2 \\ 3y^3 = y^2 + 2x^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x^2y - y^2 - 2 = 0 \\ 3y^2x - x^2 - 2 = 0 \end{cases}$

Bài 2.7 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + \sqrt{y + 3} = 3 \\ y + \sqrt{x + 3} = 3 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x + 5} + \sqrt{y - 2} = 7 \\ \sqrt{y + 5} + \sqrt{x - 2} = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} = 2 \\ x\sqrt{1 + x^2} + y\sqrt{1 + y^2} = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \\ \sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{y} = 3\sqrt{x} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + \dfrac{2}{y} = \dfrac{3}{x} \\ y + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 3\sqrt{5 - y} = 8 \\ 2y + 3\sqrt{5 - x} = 8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \sqrt[3]{3x + 5} = y + 1 \\ \sqrt[3]{3y + 5} = x + 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 1 = \sqrt{2 + \sqrt{y + 3}} \\ y + 1 = \sqrt{2 + \sqrt{x + 3}} \end{cases}$

Bài 2.8 Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2(1 - 2y) = y^2(4x + 2y) \\ 2x^2 + xy - y^2 = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2(y^2 + 1) = 2 \\ x^2y^2 + xy + 1 = 3x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 2 = x(y - 1) \\ y^2 - 7 = y(x - 1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$

Bài 2.9 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y = 4 \\ x^2 + xy + 2y + x = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ y^2 - xy + 5x + 4y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+2xy+9=7x+5 \end{cases}$

Bài 2.10 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+7=5y-6z \\ y^2+7=10z+3x \\ z^2+7=-x+3y \end{cases}$

Bài 2.11 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2+3xz^2-6xyz=1 \\ y^2+3yx^2+3yz^2-6xyz=1 \\ z^3+3zy^2+3zx^2-6xyz=1. \end{cases}$

Bài 2.12 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-2y)(x-4z)=3 \\ (y-2z)(y-4x)=5 \\ (z-2x)(z-4y)=-8. \end{cases}$

Bài 2.13 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(yz-1)=3 \\ y(zx-1)=4 \\ z(xy-1)=5. \end{cases}$

Bài 2.14 Giải hệ phương trình $\begin{cases} ab+c+d=3 \\ bc+d+a=5 \\ cd+a+b=2 \\ da+b+c=6 \end{cases}$

Bài 2.15 Cho $a \in \mathbb{R}$. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1^2+ax_1+(\frac{a-1}{2})^2=x_2 \\ x_2^2+ax_2+(\frac{a-1}{2})^2=x_3 \\ ... \\ x_n^2+ax_n+(\frac{a-1}{2})^2=x_1 \end{cases}$

2.3 Phương pháp đặt ẩn phụ - Hệ đối xứng loại một

Mục đích của đặt ẩn phụ là ta đưa hệ phương trình đã cho về một hệ phương trình đơn giản hơn đã biết cách giải, giải được hệ mới từ đó ta giải được hệ đã cho.
Trong phương pháp này, ứng dụng đầu tiên là áp dụng cho giải các hệ đối xứng loại một.
Hệ đối xứng loại một là hệ có dạng $\begin{cases} f(x,y) = 0(1) \\ g(x,y) = 0(2) \end{cases}$ trong đó $f(y,x) = f(y,x)$ và $g(x,y) = g(y,x)$, hay nói cách khác các biểu thức $f(x,y), g(x,y)$ là các biểu thức đối xứng theo hai biến x, y. Để giải hệ, ta thường đặt $s = x + y, p = xy$, từ đó đưa hệ về theo ẩn s, p. Giải s, p ta sẽ giải được x, y. Sau đây là một số ví dụ, các bạn theo dõi nhé.

Ví dụ 2.19. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x^2 + y^2 + 3xy = 3. \end{cases}$

Lời giải. Đặt $S = x + y, P = xy$. Điều kiện $S^2 \geq 4P$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S + P = 1 \\ S^2 + P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 1 - S \\ S^2 - S - 2 = 0. \end{cases}.$$

Ta có $S^2 - S - 2 = 0 \Leftrightarrow S = -1$ hoặc $S = 2$.
Nếu $S = -1$ thì $P = 2$ (loại).
Nếu $S = 2$ thì $P = -1$.
Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:
$X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \pm \sqrt{2}$.
Suy ra $(x,y) = (1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ hoặc $(x,y) = (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.
Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x,y) = (1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ hoặc $(x,y) = (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$. ■

Ví dụ 2.20. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x - y + xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Lời giải. Đặt $u = x - y, v = xy$. Ta được hệ $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + 2v = 2. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ u^2 + 2(1-u) = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ u^2 - 2u = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 \\ v = -1. \end{cases}$$

Trường hợp $\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ hoặc $(1, -1)$. ■

Ví dụ 2.21. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

Lời giải. Đặt $u = \sqrt[3]{x}, v = \sqrt[3]{y}$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u^3 + v^3) = 3(u^2v + uv^2) \\ u + v = 6. \end{cases}$ Đặt $S = u + v, P = u.v (S^2 \geq 4P)$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2\left(S^3 - 3SP\right) = 3SP \\ S = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2(36 - 3P) = 3P \\ S = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra u, v là nghiệm phương trình $X^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ hoặc $X = 4$.

Trường hợp $(u, v) = (2, 4)$ suy ra $(x, y) = (8, 64)$.

Trường hợp $(u, v) = (4, 2)$ suy ra $(x, y) = (64, 8)$.

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (8, 64)$ hoặc $(x, y) = (64, 8)$. ■

Ví dụ 2.22. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{26}{5} \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$.

Lời giải. Điều kiện $xy \neq 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{26}{5}xy \\ (x - y)(x + y) = 24 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = \dfrac{26}{5}xy \\ [(x + y)^2 - 4xy](x + y)^2 = 24^2. \end{cases}$.

Đặt $u = (x + y)^2, v = xy$ ta được $\begin{cases} u = \dfrac{36}{v} \\ u^2 - 4uv = 24^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 36 \\ v = 5. \end{cases}$ Từ đó ta được hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2 = 36 \\ xy = 5. \end{cases}$.

Trường hợp $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=5 \\ y=1. \end{cases}$

Trường hợp $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-5 \\ y=-1. \end{cases}$ ∎

Ví dụ 2.23. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2} + \dfrac{y^2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2} \\ 3xy = x+y+1. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $(x+1)(y+1) \neq 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (\dfrac{x}{y+1})^2 + (\dfrac{y}{x+1})^2 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Đặt $u = \dfrac{x}{y+1}, v = \dfrac{y}{x+1}$ ta được

$$\begin{cases} uv = \dfrac{1}{4} \\ u^2+v^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv = \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u+v=-1 \\ uv = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Trường hợp $\begin{cases} u+v=1 \\ uv=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Trường hợp $\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ giải tương tự ta được $x=y=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x,y) = (-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}), (1,1)$. ∎

Bài tập

Bài 2.16 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3+y^3=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^8+y^8=x^{10}+y^{10} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3xy-x^2-y^2=5 \\ 7x^2y^2-x^4-y^4=155 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+xy=\dfrac{7}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2}xy \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3 \\ (x+y)(x^2+y^2)=15 \end{cases}$

$$\begin{cases}(x^2+y^2)xy=78\\ x^4+y^4=97\end{cases}$$

Bài 2.17 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=1\\ x-y-xy=3\end{cases}$

b) $\begin{cases}x-y+xy=1\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^3y^3+1=2y^3\\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^2}=2.\end{cases}$

d) $\begin{cases}x^2+y^2+x^2y^2=1+2xy\\ (x-y)(1+xy)=1-xy\end{cases}$

e) $\begin{cases}\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{26}{5}\\ x^2-y^2=24\end{cases}$

f) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=3\\ xy^3+x^3y=2\end{cases}$

g) $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=4\\ x^2+xy-y=0\end{cases}$

h) $\begin{cases}x-2y+\dfrac{x}{y}=6\\ x^2-2xy-6y=0\end{cases}$

i) $\begin{cases}\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+x+y=4\end{cases}$

j) $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4\\ x+y+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=4\end{cases}$

k) $\begin{cases}x+y+x^2y^2=3xy\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy=1\end{cases}$

l) $\begin{cases}x(x+1)+\dfrac{1}{y}(\dfrac{1}{y}+1)=4\\ x^3y^3+xy+x^2y^2+1=4y^3\end{cases}$

m) $\begin{cases}(x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x^2y^2})=49\\ (x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=5\end{cases}$

Ví dụ 2.24. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2+y^2 = xy+x+y \\ x^2-y^2 = 3. \end{cases}$

Lời giải. Đặt $u = x+y, v = x-y$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{u^2+v^2}{2} = \dfrac{u^2-v^2}{4} + u \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+3v^2-4u = 0 \\ uv = 3 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + \dfrac{27}{u^2} - 4u = 0 \\ v = \dfrac{3}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 - 4u^3 + 27 = 0 \\ v = \dfrac{3}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-3)^2(u^2+2u+3) = 0 \\ v = \dfrac{3}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (2, 1)$.

■

Ví dụ 2.25. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} y(x^2+1) = 2x(y^2+1) \\ (x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x^2y^2}) = 24 \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $xy \neq 0$.

Đặt $u = x + \dfrac{1}{x}, v = y + \dfrac{1}{y}$ ta được hệ $\begin{cases} \dfrac{u}{v} = 2 \\ u^2+v^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ 5v^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \pm 4 \\ v = \pm 2. \end{cases}$.

Trường hợp $\begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases}$ ta được

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 4 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+1 = 0 \\ y^2-2x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = 1. \end{cases}$$

Trường hợp $\begin{cases} u = -4 \\ v = -2 \end{cases}$ ta được

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = -4 \\ y + \dfrac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{3} \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (2 \pm \sqrt{3}, 1), (-2 \pm \sqrt{3}, -1)$. ■

Ví dụ 2.26. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} (x^2 + y^2)(1 + \dfrac{1}{xy})^2 = 9 \\ (x^3 + y^3)(1 + \dfrac{1}{xy})^3 = 27. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $xy \neq 0$. Đặt $u = x + \dfrac{1}{y}, v = y + \dfrac{1}{x}$. Ta được hệ

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u^3 + v^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\dfrac{u}{3})^2 + (\dfrac{v}{3})^2 = 1 \\ (\dfrac{u}{3})^3 + (\dfrac{v}{3})^3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u}{3} = 1 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} v = 0 \\ \dfrac{v}{3} = 1. \end{cases}$$

Trường hợp $\begin{cases} u = 3 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 3 \\ y + \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

Trường hợp còn lại tương tự.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm. ■

Ví dụ 2.27. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x - y = 1 + \sqrt{x(1+y)} \\ x^3 - y^2 = 7. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x(y+1) \geq 0$. Dễ dàng kiểm tra $(0, y)$ và $(x, -1)$ không là nghiệm của hệ. Xét $x \neq 0$ và $y \neq -1$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$2x = 1 + y + \sqrt{x(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x}{y+1}} = \sqrt{\frac{y+1}{x}} + 1.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{y+1}{x}}>0$ ta được

$$\begin{aligned}&t^2+t-2=0\\ \Leftrightarrow\ &t=1 \text{ hoặc } t=-2(\text{loại}).\end{aligned}$$

Trường hợp $t=1 \Leftrightarrow y=x-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\begin{aligned}&x^3-x^2+2x-8=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-2)(x^2+x+4)=0\\ \Leftrightarrow\ &x=2.\end{aligned}$$

Với $x=2$ thì $y=x-1=1$.
Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=(2,1)$. ■

Ví dụ 2.28. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}(2x-y+2)(2x+y)+6x-3y=-6\\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{y-1}=4.\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x\geq -\dfrac{1}{2}, y\geq 1$. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2x+1}\\ v=\sqrt{y-1}\end{cases}$. Hệ trở thành

$$\begin{aligned}&\begin{cases}(u^2-v^2)(u^2+v^2)+3(u^2-v^2-2)=-6\\ u+v=4\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}4(u-v)(u^2+v^2+3)=0\\ u+v=4\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}u=v\\ u+v=4\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}u=2\\ v=2\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=5.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=5.\end{cases}$ ■

Ví dụ 2.29. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Lời giải. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=x^2+y \\ v=xy \end{cases}$. Hệ trở thành $\begin{cases} u+v+uv=-\dfrac{5}{4} \\ u^2+v=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} & u^2-uv-u=0 \\ \Leftrightarrow\ & u(u-v-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & u=0 \text{ hoặc } u=1+v. \end{aligned}$$

Với $u=0 \Rightarrow v=-\dfrac{5}{4}$.

Với $u=v+1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ trên ta được

$$4u^2+4u+1=0 \Leftrightarrow u=-\frac{1}{2} \Rightarrow v=-\frac{3}{2}.$$

Trường hợp

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u=0 \\ v=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} y=-x^2 \\ x^3=\dfrac{5}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2x} = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1, -\frac{3}{2}), (\sqrt[3]{\frac{5}{4}}, -\sqrt[3]{\frac{25}{16}})$. ■

Bài tập

Bài 2.18 Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ 2x^3 + 6y^2x = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y)(1 + \frac{1}{xy}) = 4 \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x^2+y^2}{xy} = 4. \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x+y)(1+xy) = 18xy \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2) = 208x^2y^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (x+y)(1 + \frac{1}{xy}) = 5 \\ xy + \frac{1}{xy} = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (x+y)(1 + \frac{1}{xy}) = 6 \\ (x^2+y^2)(1 + \frac{1}{xy})^2 = 18 \end{cases}$

Bài 2.19 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = \frac{2}{3} \\ (x+y)(1 + \frac{1}{xy}) = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy(2x+y-6)+y+2x=0 \\ (x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{xy})^2=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2y+y^2x+2y+x=6xy \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2y^2+y^4+1=3y^2 \\ xy^2+x=2y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y+\dfrac{1}{x}=4 \\ x^2+xy+\dfrac{1}{x}=3. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2y+y=2 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+x^2y^2=3. \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4xy \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}=4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^4+4x^2+y^2-4y=2 \\ x^2y+2x^2+6y=23 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9 \\ (\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}})=18 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2=(4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2=(5z^2+z+1)=x^2y^2 \end{cases}$